

5. Критерии проверки и оценка решений задания 16

Задание № 16 – это планиметрическая задача. В пункте *а* теперь нужно **доказать** геометрический факт, в пункте *б* – найти (вычислить) геометрическую величину.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> и при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> , ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> с использованием утверждения пункта <i>а</i> , при этом пункт <i>а</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>3</i>

Задание 1

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH . На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH к ED , если $\angle BCD = 120^\circ$.

Решение.

а) Поскольку

$$\angle ABC = \angle AHC = \angle ECD = \angle EAD = 90^\circ,$$

около четырёхугольников $ABCH$ и $AECD$ можно описать окружности (рис. 1).

Значит,

$$\angle ABH = \angle ACH = \angle ACD = \angle AED,$$

то есть прямые BH и ED параллельны.

б) Опустим из точки B перпендикуляр BK на прямую CD (рис. 2). Стороны KH и CD треугольников BKH и ECD лежат на одной прямой, а стороны BK и EC , BH и ED попарно параллельны. Значит, треугольники BKH и ECD подобны.

Поскольку

$$\begin{aligned} BK &= BC \cdot \sin \angle BCK = EC \cdot \cos \angle ECB \cdot \sin \angle BCK = \\ &= EC \cdot \cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ = \frac{3}{4} EC, \end{aligned}$$

коэффициент подобия равен $\frac{3}{4}$. Значит,

$$BH : ED = 3 : 4.$$

Ответ: б) 3:4.

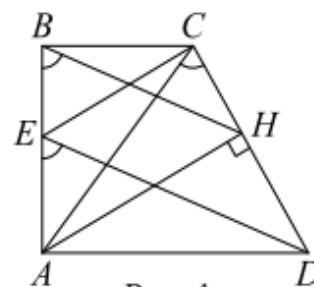


Рис. 1

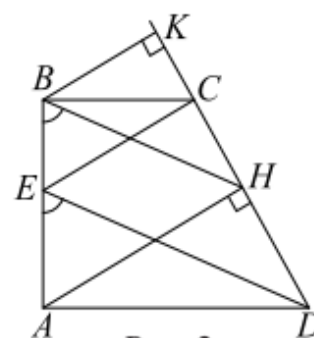


Рис. 2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,	1

ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> с использованием утверждения пункта <i>а</i> , при этом пункт <i>а</i> не выполнен	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>3</i>

Задание 2

В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH . Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.

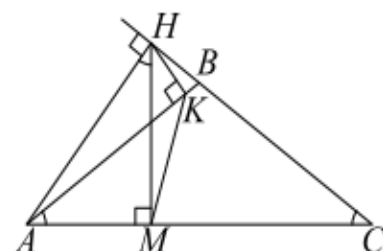
б) Найдите MK , если $AB = 5$, $AC = 8$.

Решение.

а) Поскольку $\angle AMH = \angle AKN = 90^\circ$, около четырёхугольника $AMKH$ можно описать окружность с диаметром AH . Получаем:

$$\angle BAC = \angle BCA = 90^\circ - \angle HAC = \angle AHM,$$

поэтому $AM = MK$ как хорды, стягивающие равные дуги.



б) В прямоугольных треугольниках AHM и ACH имеем:

$$AM = AH \cdot \cos \angle HAM = AC \cdot \cos^2 \angle HAM = AC \cdot (1 - \cos^2 \angle ACB).$$

Поскольку $\cos \angle ACB = \frac{AC}{2BC} = \frac{4}{5}$, получаем:

$$MK = AM = \frac{72}{25}.$$

Ответ: б) $\frac{72}{25}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Задание 3

В остроугольном треугольнике ABC все стороны различны. Прямая, содержащая высоту BH треугольника ABC , вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке K . Отрезок BK – диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $AN = CK$.

б) Найдите NK , если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 16, $\angle BAC = 40^\circ$, $\angle ACB = 85^\circ$.

Решение.

а) Поскольку BK – диаметр описанной около треугольника ABC окружности, получаем

$$\begin{aligned}\angle ABN &= 90^\circ - \angle ANB = 90^\circ - \angle ACB = \\ &= 90^\circ - \angle HCB = \angle CBH = \angle CBK.\end{aligned}$$

Следовательно, хорды AN и CK стягивают равные дуги, а значит, они равны.

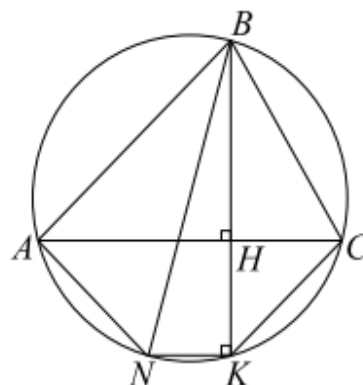
б) Пусть $R = 16$ – радиус окружности, описанной около треугольника ABC . Имеем:

$$\begin{aligned}\angle ABN &= \angle CBH = 90^\circ - \angle HCB = 5^\circ, \\ \angle ABC &= 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB = 55^\circ; \\ \angle KBN &= \angle ABC - \angle ABN - \angle CBK = 45^\circ.\end{aligned}$$

Следовательно, по теореме синусов

$$NK = 2R \cdot \sin \angle KBN = 2R \cdot \sin 45^\circ = 16\sqrt{2}.$$

Ответ: б) $16\sqrt{2}$.



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Примеры оценивания решений задания 16

Пример 16.1

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH . На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH к ED , если $\angle BCD = 120^\circ$.

Ответ: б) 3:4.

№16.

Дано:

$ABCD$ -трапеция

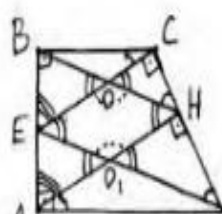
$BC \perp AB \perp AD$

$AH \perp CD$

$CE \perp CD$

а) Доказать:

$BH \parallel ED$



Доказательство:

1) т.к. $AH \perp CD$ и $CE \perp CD$, то $AH \parallel CE$;

2) AB - секущая при двух $\parallel$ прямых, значит $\angle BEC = \angle BAH$;

3) BH - тоже секущая, значит $\angle BOE = \angle CON = \angle BHA$;

4) ED - тоже секущая, значит $\angle CED = \angle EOA = \angle HOD$;

5) $\angle EOH = 180^\circ - \angle CON$ (смеж. углы), $\angle EOH = 180^\circ - \angle BHA$. т.к. $\angle CON = \angle BHA$, то $\angle EOH = \angle EOH$, следовательно, $EOHO$ - параллелограм, а его противоположные стороны $=$ и $\parallel$, значит, $BH \parallel ED$.

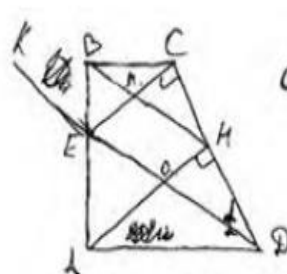
Пример 16.2

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH . На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

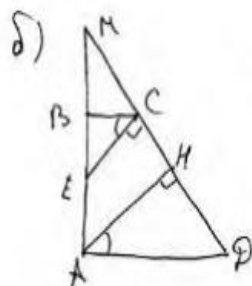
а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH к ED , если $\angle BCD = 120^\circ$.

Ответ: б) $3:4$.



а) Пусть $\angle ODH = \alpha$, тогда:
 $\angle HOD = 90^\circ - \alpha$; $\angle HOE = 90^\circ - \alpha$ ($\angle HOE = \angle HOD$ как верт.)
 $\angle EOH + \angle HOD = 180^\circ \Rightarrow \angle EOH = 90^\circ + \alpha$
 $\angle EOH = \angle HEO$ (как Н.Л.У) или $CE \parallel AH$ и сек $EO \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle HEO = 90^\circ - \alpha$ $\angle EHM = 180^\circ - \angle HEO = 90^\circ + \alpha$
 $\angle EHM = \angle BMC$ (как соотв.) $\Rightarrow \angle EHM = \angle BMC = 90^\circ + \alpha$
 $\Rightarrow \angle OHM = 360^\circ - (90^\circ + \alpha) - (90^\circ + \alpha) - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ - \alpha$
 $\angle CHM = 180^\circ - \angle BMC = 90^\circ - \alpha$
 $\angle CHM = \angle OHM$ $\angle EHM = \angle EOH \Rightarrow EC \parallel AH$
 (и.к. равны соотв. углы.) ч.т.р



$\angle BCD = 120^\circ$
 $\angle ECD = 90^\circ \Rightarrow \angle BCE = 30^\circ$
 $\angle BCE = \angle BCD - \angle ECD = 30^\circ$
 $\angle BCE = \angle HAD$
 т.к. $CE \parallel AH$ и $BC \parallel AD$ (аналог Н.Л.У) $\Rightarrow \angle HAD = 30^\circ \Rightarrow HD = \frac{1}{2} AD$

$\angle AHD = 60^\circ \Rightarrow \angle MHD = 30^\circ \Rightarrow MD = \frac{1}{2} HD$
 $MD = \frac{1}{2} HD = MH + HD = MH + 0.5 AD \Rightarrow$
 $\Rightarrow MH = 1.5 AD$ и $\triangle MBH \sim \triangle MED$ (по 2 угл.) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{BH}{ED} = \frac{MH}{MD} = \frac{1.5}{0.5} = 3$

Ответ: $\frac{3}{4}$

Пример 16.3

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH . На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

- а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.
б) Найдите отношение BH к ED , если $\angle BCD = 120^\circ$.

Ответ: б) 3:4.

№16.

Дано: $AH \perp CD$ $\angle BCD = 120^\circ$
 $CE \perp CD$ и $CE \cap AB = E$

а) Д-ть: $BH \parallel ED$
 б) $\frac{BH}{ED} = ?$

а) 1) $AH \perp CD$
 $CE \perp CD \Rightarrow$ пер. пер. прямые $AH \parallel EC$

2) $\angle DEC = \angle DHN$ как соотв.

3) $\angle DHN = 90^\circ$

4) Пусть $AB = x$ $AH = y$ 5) $\triangle ABE \sim \triangle ABH$ т.к.

5) $\triangle BEH \sim \triangle BAH$ по 2-м углам ($\angle ABH$ - общий, $\angle BEH = \angle BAH$ как соотв.) R - коэффициент подобия

6) $AE = AB - BE = AB - RAB = x(1-R)$
 $AO = AH - OH = AH - RAB = y(1-R)$

7) $\triangle AEO \sim \triangle ABH$ по углу и 2-м сторонам
 ($\angle A$ - общий; $\frac{AO}{AH} = \frac{1-R}{1}$ и $\frac{AE}{AB} = 1-R$) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle AEO = \angle ABH$

8) $\triangle AEO \sim \triangle ABH$ т.к. $\angle AEO = \angle ABH$, то
 по признаку параллельности прямых (кр. углы парал., или
 соотв. углы равны) $ED \parallel BH$ $\hat{e}$ т. г.

Пример 16.4

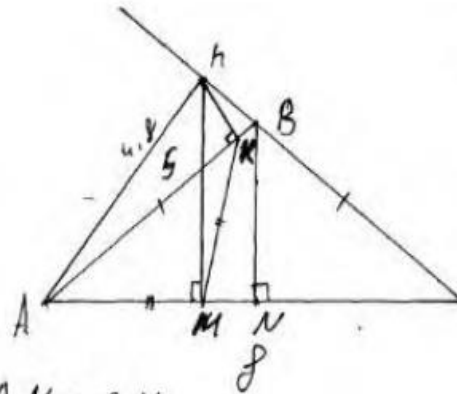
В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH . Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.

б) Найдите MK , если $AB = 5$, $AC = 8$.

Ответ: б) $\frac{72}{25}$.

16.



Дано: $AB = BC$; $\triangle ABC$

$AB = 5$

$BC = 8$

$AK \perp AB$

$HM \perp AC$

$MK = ?$

$AN = CN$

$AM = \frac{1}{2} AC = \frac{8}{2} = 4$

$\cos A = 0.8 = \frac{AM}{AB} = \frac{4}{5}$

$\frac{AM}{AB} = \frac{4}{5}$ $\cos A = \cos C = 0.8$ в $\triangle ABC$

$\frac{AM}{AB} = \frac{4}{5}$ $\Rightarrow \frac{hC}{AC} = \frac{4}{5}$

$\frac{hC}{8} = \frac{4}{5}$

$5hC = 32$

$hC = 6.4$

$\frac{Ah}{AC} = \frac{3}{5}$ $Ah = 4.8$

$\sin^2 C = 1 - \cos^2 C = 1 - 0.64 = 0.36$

$\sin C = 0.6$

$\sin C = \cos A$ в $\triangle ACH$

$\frac{AM}{Ah} = \frac{4}{5}$ $\frac{AM}{4.8} = 0.8$

$AM = \frac{3.84}{5}$ $AM = 0.6 \cdot 4.8$

$AM = 2.88$

$AM = MK = 2.88$

Ответ: $MK = 2.88$

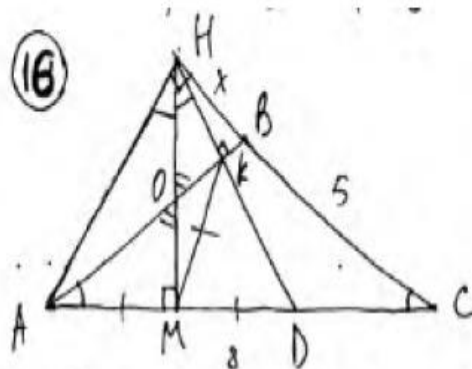
Пример 16.5

В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота $АН$. Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.

б) Найдите MK , если $AB=5$, $AC=8$.

Ответ: б) $\frac{72}{25}$.



а) $\triangle ABE: p(5) \Rightarrow \angle BAE \angle BSA (1)$
 $\triangle AHE: \text{прямоуг. } HK \text{ высота } (2)$
 $\triangle ACH \sim \triangle AKM \Rightarrow \angle ACB \angle AKM (2)$
 $\triangle AOM \sim \triangle ONK (4) \Rightarrow \angle OAM \angle ONK (3)$
 $(1), (2), (3) \Rightarrow OK - \text{бисс. в } \triangle AKB.$
~~продолжить прямую HK до~~ $\triangle AKD:$

$HM - \text{бисс. и бисс. } \Rightarrow \triangle AKD - p(5) \Rightarrow HM - \text{перпенд. } \Rightarrow AM \angle MD$
 $\triangle AKD: \text{прямоуг. } AM \angle MD \Rightarrow KM - \text{бисс. } \Rightarrow \begin{cases} \angle KHM \angle ADK \\ HM \angle MD \end{cases} \Rightarrow$
 $2KM \angle 2AM \Rightarrow KM \angle AM \quad \text{и. т. д.}$

б) пусть $KB \angle x$ ~~$\triangle AKB: \text{прямоуг. } AK^2 \angle AB^2 - KB^2$~~
 $\triangle AHE: \text{прямоуг. } AH^2 \angle AC^2 - KC^2 \Rightarrow AB^2 - KB^2 \angle AC^2 - KC^2$
 $25 - KB^2 \angle 64 - CB^2 - 2KB \cdot CB - KB^2 \quad KB \angle 1,4$
 $\triangle AKE: KC^2 \angle MC \cdot AC \quad (6,4)^2 \angle 8CM \quad CM \angle 5,12$
 $AM \angle AC - MC \angle 8 - 5,12 \angle 2,88$
 $AM \angle HK \quad \Rightarrow MK \angle 2,88$

Ответ: б) $MK \angle 2,88$

6. Критерии проверки и оценка решений задания 17

Задание № 17 – это уравнение, неравенство или их системы с параметром.

Задачи с параметром допускают весьма разнообразные способы решения. Наиболее распространёнными из них являются:

- чисто алгебраический способ решения;
- способ решения, основанный на построении и исследовании геометрической модели данной задачи;
- функциональный способ, в котором могут быть и алгебраические, и геометрические элементы, но базовым является исследование некоторой функции.

Зачастую (но далеко не всегда) графический метод более ясно ведёт к цели. Кроме того, в конкретном тексте решения вполне могут встречаться элементы каждого из трёх перечисленных способов.

Задание 1

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$ имеет ровно три различных корня.

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению

$$3x^2 + 2ax + 1 = (x^2 + ax + 1)^2 \text{ при условии } x^2 + ax + 1 \geq 0.$$

Решим уравнение $3x^2 + 2ax + 1 = (x^2 + ax + 1)^2$:

$$3x^2 + 2ax + 1 = x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2)x^2 + 2ax + 1; \quad x^4 + 2ax^3 + (a^2 - 1)x^2 = 0;$$

$$x^2(x + a + 1)(x + a - 1) = 0, \text{ откуда } x = 0, \quad x = 1 - a \text{ или } x = -1 - a.$$

Исходное уравнение имеет три корня, когда эти числа различны и для каждого из них выполнено условие $x^2 + ax + 1 \geq 0$.

Рассмотрим условия совпадения корней. При $a = 1$ имеем $1 - a = 0$. При $a = -1$ имеем $-1 - a = 0$. При остальных значениях a числа 0 , $1 - a$, $-1 - a$ различны.

При $x = 0$ получаем: $x^2 + ax + 1 = 1 \geq 0$ при всех значениях a .

При $x = 1 - a$ получаем: $x^2 + ax + 1 = (1 - a)^2 + a(1 - a) + 1 = 2 - a$.

Это выражение неотрицательно при $a \leq 2$.

При $x = -1 - a$ получаем: $x^2 + ax + 1 = (-1 - a)^2 + a(-1 - a) + 1 = a + 2$.

Это выражение неотрицательно при $a \geq -2$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно три различных корня при $-2 \leq a < -1$; $-1 < a < 1$; $1 < a \leq 2$.

Ответ: $-2 \leq a < -1$; $-1 < a < 1$; $1 < a \leq 2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только исключением точек $a = -2$ и/или $a = 2$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $(-2; 2)$ множества значений a , возможно, с включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Получены корни уравнения $3x^2 + 2ax + 1 = (x^2 + ax + 1)^2$: $x = 0$, $x = 1 - a$, $x = -1 - a$ и задача верно сведена к исследованию полученных корней при условии $x^2 + ax + 1 > 0$ ($x^2 + ax + 1 \geq 0$)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>4</i>

Задание 2

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 - y - |x - 5y + 5| = 52, \\ y - 2 = a(x - 5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Рассмотрим два случая:

1) Если $x - 5y + 5 \geq 0$, то получаем уравнение

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + y^2 - y - x + 5y - 5 &= 52; \\ x^2 + 4x + y^2 + 4y - 57 &= 0; \\ (x + 2)^2 + (y + 2)^2 &= 65. \end{aligned}$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_1(-2; -2)$

и радиусом $\sqrt{65}$.

2) Если $x - 5y + 5 \leq 0$, то получаем уравнение

$$x^2 + 5x + y^2 - y + x - 5y + 5 = 52; \quad x^2 + 6x + y^2 - 6y - 47 = 0; \quad (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 65.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_2(-3; 3)$

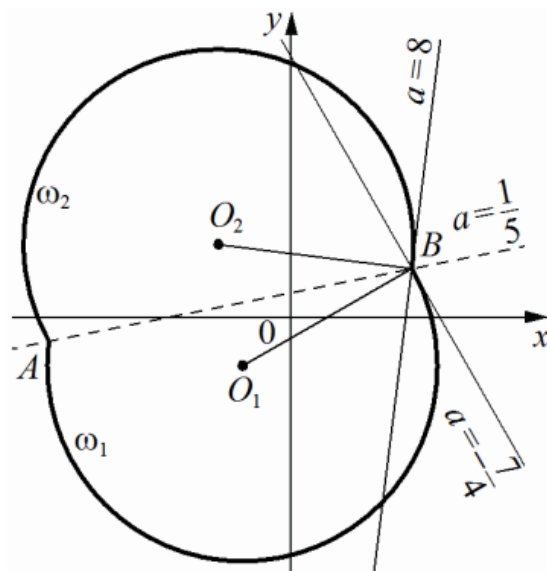
и радиусом $\sqrt{65}$.

Полученные окружности пересекаются в двух точках $A(-10; -1)$ и $B(5; 2)$, лежащих на прямой $x - 5y + 5 = 0$, поэтому в первом случае получаем дугу ω_1 с концами в точках A и B , во втором – дугу ω_2 с концами в тех же точках (см. рисунок).

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую m , которая проходит через точку B , и угловой коэффициент которой равен a .

При $a = \frac{1}{5}$ прямая m проходит через точки A и B , то есть исходная система имеет два решения.

При $a = -\frac{7}{4}$ прямая m перпендикулярна прямой O_1B , угловой коэффициент которой равен $\frac{4}{7}$, значит, прямая m касается дуги ω_1 в точке B и пересекает дугу ω_2 в двух точках (одна из которых – точка B), то есть исходная система имеет два решения.



При $a=8$ прямая m перпендикулярна прямой O_2B , угловой коэффициент которой равен $-\frac{1}{8}$, значит, прямая m касается дуги ω_2 в точке B и пересекает дугу ω_1 в двух точках (одна из которых – точка B), то есть исходная система имеет два решения.

При $a < -\frac{7}{4}$ или $a > 8$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке B и ещё в одной точке, отличной от точки A , то есть исходная система имеет три решения.

При $-\frac{7}{4} < a < \frac{1}{5}$ прямая m пересекает дугу ω_2 в двух точках (одна из которых – точка B) и не пересекает дугу ω_1 в точках, отличных от точки B , то есть исходная система имеет два решения.

При $\frac{1}{5} < a < 8$ прямая m пересекает дугу ω_1 в двух точках (одна из которых – точка B) и не пересекает дугу ω_2 в точках, отличных от точки B , то есть исходная система имеет два решения.

Значит, исходная система имеет ровно два решения при $-\frac{7}{4} \leq a \leq 8$.

Ответ: $-\frac{7}{4} \leq a \leq 8$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только исключением точек $a = -\frac{7}{4}$ и/или $a = 8$	3
При всех значениях a верно найдено количество решений системы в одном из двух случаев, возникающих при раскрытии модуля ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуг окружностей и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задание 3

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{|3x| - 2x - 2 - a}{x^2 - 2x - a} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Корнями исходного уравнения являются корни уравнения $|3x| - 2x - 2 - a = 0$, для которых выполнено условие $x^2 - 2x - a \neq 0$.

При $x \leq 0$ уравнение $|3x| - 2x - 2 - a = 0$ принимает вид $-5x - 2 - a = 0$ и задаёт на плоскости Oxa луч l_1 с началом в точке $(0; -2)$. При $x \geq 0$ уравнение $|3x| - 2x - 2 - a = 0$ принимает вид $x - 2 - a = 0$ и задаёт луч l_2 с началом в точке $(0; -2)$. Значит, уравнение $|3x| - 2x - 2 - a = 0$ имеет два корня при $a > -2$, имеет один корень при $a = -2$ и не имеет корней при $a < -2$.

Уравнение $x^2 - 2x - a = 0$ задаёт параболу $a = x^2 - 2x$.

Координаты точек пересечения параболы $a = x^2 - 2x$ с лучом l_1 являются решениями системы:

$$\begin{cases} a = x^2 - 2x, \\ a = -5x - 2, \\ x \leq 0; \end{cases} \begin{cases} -5x - 2 = x^2 - 2x, \\ a = -5x - 2, \\ x \leq 0; \end{cases} \begin{cases} (x+1)(x+2) = 0, \\ a = -5x - 2, \\ x \leq 0. \end{cases}$$

Значит, парабола $a = x^2 - 2x$ пересекается с лучом l_1 в точках $(-1; 3)$ и $(-2; 8)$.

Координаты точек пересечения параболы $a = x^2 - 2x$ с лучом l_2 являются решениями системы:

$$\begin{cases} a = x^2 - 2x, \\ a = x - 2, \\ x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x - 2 = x^2 - 2x, \\ a = x - 2, \\ x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} (x-1)(x-2) = 0, \\ a = x - 2, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Значит, парабола $a = x^2 - 2x$ пересекается с лучом l_2 в точках $(1; -1)$ и $(2; 0)$.

Следовательно, условие $x^2 - 2x - a \neq 0$ выполнено для корней уравнения $|3x| - 2x - 2 - a = 0$ при всех a , кроме $a = -1$, $a = 0$, $a = 3$ и $a = 8$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два корня при $-2 < a < -1$; $-1 < a < 0$; $0 < a < 3$; $3 < a < 8$; $a > 8$.

Ответ: $-2 < a < -1$; $-1 < a < 0$; $0 < a < 3$; $3 < a < 8$; $a > 8$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только включением точки $a = -2$	3
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения, и получено или множество значений a , отличающееся от искомого только включением точек $a = 8$, $a = 3$ и/или $a = -2$, или множество значений a , отличающееся от искомого только включением точек $a = 0$, $a = -1$ и/или $a = -2$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения параболы и лучей (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>4</i>

Примеры оценивания решений задания 17

Пример 17.1

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$$

имеет ровно три различных корня.

Ответ: $-2 \leq a < -1$; $-1 < a < 1$; $1 < a \leq 2$.

$$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$$

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ 3x^2 + 2ax + 1 = x^4 + a^2x^2 + 1 + 2x^2 + 2ax^3 + 2ax \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ x^4 + a^2x^2 - x^2 + 2ax^3 + 2ax = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ x^2(x^2 + a^2 - 1 + 2ax) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Уравнение имеет решение, когда

$x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$ имеет 2 корня и

они удовлетворяют неравенству $x^2 + ax + 1 \geq 0$.

$$x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$$

$$(x+a)^2 - 1 = 0$$

$$(x+a-1)(x+a+1) = 0.$$

$$\begin{cases} x = -a+1 \\ x = -a-1 \end{cases} \text{ Подставим } x \text{ в } x^2 + ax + 1 \geq 0.$$

$$x = -a-1$$

$$1) (-a+1)^2 + a(-a+1) + 1 \geq 0. \quad 2) (-a-1)^2 + a(-a-1) + 1 \geq 0$$

$$a^2 - 2a + 1 - a^2 + a + 1 \geq 0. \quad a^2 + 2a + 1 - a^2 - a + 1 \geq 0$$

$$-a + 2 \geq 0 \quad a \leq 2$$

$$2a + 2 \geq 0$$

$$a \in [-1, 2].$$

$$a \geq -1.$$

Найдем значения x , когда они совпадают;

Значит

$$1) -a+1 = -a-1$$

$$1) \text{ - нет решений}$$

$$2) 0 = -a+1$$

$$2) a = 1$$

$$3) 0 = -a-1$$

$$3) a = -1.$$

} - выписываем эти точки

$$a \in (-1, 1) \cup (1, 2].$$

при $a \in (-1, 1) \cup (1, 2]$. уравнение имеет 3 разл. корня.

Пример 17.2

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$$

имеет ровно три различных корня.

Ответ: $-2 \leq a < -1$; $-1 < a < 1$; $1 < a \leq 2$.

$N^{\circ} 18$

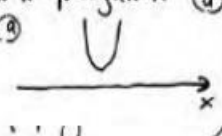
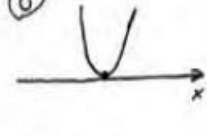
$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$ (1); $a = ?$
 ур-е имеет 3 различных корня

1) ОДЗ: $x^2 + ax + 1 \geq 0$

$x^2 + ax + 1 = 0$; $x^2 + ax + 1 > 0$, если $D \leq 0$, так как тогда парабола будет располагаться так, как на рисунках (а) или (б)

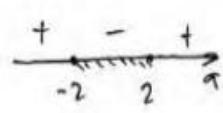
$D = a^2 - 4$

ветви параболы вверх так как коэф. при x^2 равен 1 > 0

(а)  (б) 

$D \leq 0 \Rightarrow a^2 - 4 \leq 0$; $(a-2)(a+2) \leq 0$

$\Rightarrow a \in [-2; 2]$ (*)



2) ~~при~~ при $a \in [-2; 2]$ возведем обе части уравнения в квадрат, тогда

$$3x^2 + 2ax + 1 = (x^2 + ax + 1)^2$$

$$3x^2 + 2ax + 1 = (x^2 + ax)^2 + 2(x^2 + ax) + 1$$

$$3x^2 + 2ax + 1 = x^4 + 2ax^3 + a^2x^2 + 2x^2 + 2ax + 1$$

$$x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2 - 3)x^2 = 0$$

$$x^2 \cdot (x^2 + 2ax + a^2 - 1) = 0$$

$x = 0$

$x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$

Чтобы уравнение имело ровно 3 различных корня нужно, чтобы $x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$ имело ровно 2 корня, отличные от нуля

$x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$ (*)

$\frac{D}{4} = a^2 - a^2 + 1 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = -a \pm 1$

$x_1 \neq x_2$, т.к. $-a+1 \neq -a-1 \Rightarrow 1 \neq -1$ - не верно

$\Rightarrow$ уравнение (*) имеет 2 различных корня при $\forall a$ из ОДЗ

$\Rightarrow$ уравнение (1) имеет 3 различных корня при $\forall a$ из ОДЗ, то есть $a \in [-2; 2]$

Ответ: $a \in [-2; 2]$

Пример 17.3

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$$

имеет ровно три различных корня.

Ответ: $-2 \leq a < -1$; $-1 < a < 1$; $1 < a \leq 2$.

$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$ *или* $x^2 + ax + 1 < 0$ *или* $x^2 + ax + 1 = 0$ *или* $x^2 + ax + 1 > 0$

Значит, три различных корня

① $x^2 + ax + 1 < 0$
нет решений

② $x^2 + ax + 1 = 0$ (1)
тогда $3x^2 + 2ax + 1 = 0$ (2)

вариант ситуации

(1) имеет 2 корня
(2) имеет 1 корень

(1) имеет 1 корень
(2) имеет 2 корня

(1) $x^2 + ax + 1 = 0$
 $D > 0$ $a^2 - 4 > 0$
 $(a-2)(a+2) > 0$

(2) $3x^2 + 2ax + 1 = 0$
 $D_1 = a^2 - 3 = 0$
 $a^2 = 3$
 $a = \pm\sqrt{3}$

или $a = \pm\sqrt{3}$ и в (1) не $> 0 \Rightarrow a \neq \pm\sqrt{3}$

(1) $x^2 + ax + 1 = 0$
 $D = 0$ $a^2 - 4 = 0$
 $a = \pm 2$

$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$

(2) $3x^2 + 2ax + 1 = 0$
 $D_1 = a^2 - 3 > 0$
 $(a - \sqrt{3})(a + \sqrt{3}) > 0$ *или* $a > \sqrt{3}$ *или* $a < -\sqrt{3}$

$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 3}}{3}$

$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{4 - 3}}{3} = \frac{-a \pm 1}{3}$ *корни различные*

аналогично при $a = -2$

$x_1 = -1, x_2 = -1$
 $x_3 = \frac{-a + 1}{3} = \frac{2 + 1}{3} = 1$
 $x_4 = \frac{-a - 1}{3} = \frac{2 - 1}{3} = \frac{1}{3}$
 $x_5 = \frac{1}{3}$
 $x_6 = 1$
 $x_7 = x_3$ $a = -2$ не *ра*

или, продолжение

③ $x^2 + ax + 1 > 0$
 $3x^2 + 2ax + 1 = x^2 + ax^2 + 1 + 2ax^3 + 2x^2 + 2ax$
 $2x^3 + 2x^2 + 2ax = 0$
 $2x^2(x + 1 + a) = 0$
 $x = 0$ $x = -1 - a$
 $a \neq \pm 2$

прямые и т.д.

③ $x^4 + a^2 x^2 - x^2 + 2ax^3 = 0$

замени вычитаемое
 $x^2 + ax + 1 > 0$ (*) пер-ко с точкой

$x^2 / (x^2 + a^2 - 1 + 2ax) > 0$ или да

$x \neq 0$
 - корни,
 которых
 не будет
 независимы
 от
 параметра
 a

$x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$
 должно иметь 2 различные решения
 $D_4 = a^2 - (a^2 - 1) > 0$
 $a^2 - a^2 + 1 > 0$
 верно для
 любого a
 корни
 не равны
 всегда
 и не зависят
 от параметра
 x_3)

$x_{1,2} = \frac{-a \pm 1}{1}$

$x_1 = -a + 1$ $x_2 = -a - 1$

$x_1 \neq x_2$ $-a + 1 \neq -a - 1$
 $1 \neq -1$ верно для любого a

x_1 / x_3

$-a + 1 \neq 0$

$-a - 1 \neq 0$

$a \neq 1$

$a \neq -1$

(*) : $x_1 = -a + 1$

замени вычитаемое
 $x_2 = -a - 1$

$(-a+1)^2 + a(-a+1) + 1 > 0$ (или x_1)
 $(-a-1)^2 + a(-a-1) + 1 > 0$ (или x_2)

$(1-a)^2 - a^2 + a + 1 > 0$ $(a+1)^2 - a^2 - a + 1 > 0$

$1 - 2a + a^2 - a^2 + a + 1 > 0$ $a^2 + 2a + 1 - a^2 - a + 1 > 0$

$2 - a > 0$

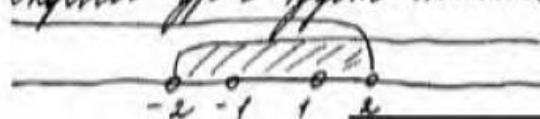
$a + 2 > 0$

$a < 2$

$a > -2$

эти два сп-та имеют решение для a:

$a \in (-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2)$



Или: $a \in (-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2)$

Пример 17.4

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 - y - |x + 5y + 5| = 52, \\ y - 2 = a(x - 5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $-8 \leq a \leq \frac{7}{4}$.

Решение:

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 + y - |x + 5y + 5| = 52 \\ y + 2 = a(x - 5) \end{cases}$$

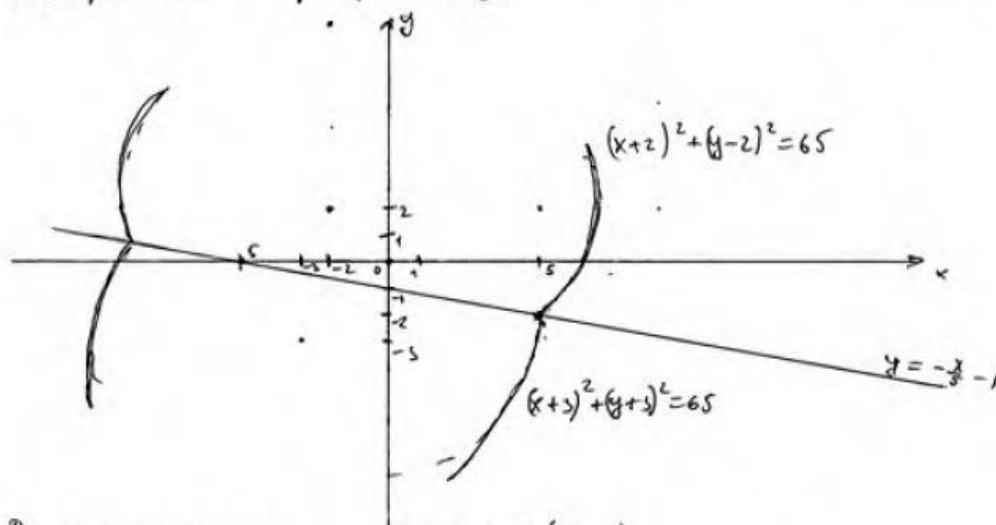
Рассмотрим 2 случая при $x + 5y + 5 \geq 0$ и при $x + 5y + 5 < 0$

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 + y - x - 5y - 5 = 52 \\ x + 5y + 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x + y^2 + y + x + 5y + 5 = 52 \\ x + 5y + 5 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-2)^2 = 65 \\ y \geq -\frac{x}{5} - 1 \end{cases} \begin{cases} (x+5)^2 + (y+3)^2 = 65 \\ y \leq -\frac{x}{5} - 1 \end{cases}$$

65 - графиком ф-ии является окр. с центром $(-2; 2)$ и $r = \sqrt{65}$
65 - графиком ф-ии является окр. с центром $(-3; -3)$ и $r = \sqrt{65}$.

Построим $\checkmark$ графики.



Рассмотрим $y + 2 = a(x - 5)$.

$y = a(x - 5) - 2$. - графиком ф-ии является множество прямых, проходящих через точку $(5; -2)$. Тогда, где касание окр. $\text{окр.} \left(\left\{ -5; -3 \right\}; \sqrt{65} \right)$ "а" должно быть равно -8 , а где касание окр. $\left(\left\{ -2; 2 \right\}; \sqrt{65} \right)$ "а" должно быть равно $\frac{7}{4}$.

при $a \in [-8; \frac{7}{4}]$ сис-ма имеет 2 корня.

при $a \in (-\infty; -8) \cup (\frac{7}{4}; +\infty)$ сис-ма имеет 3 корня.

Ответ: $a \in [-8; \frac{7}{4}]$.

Пример 17.5

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

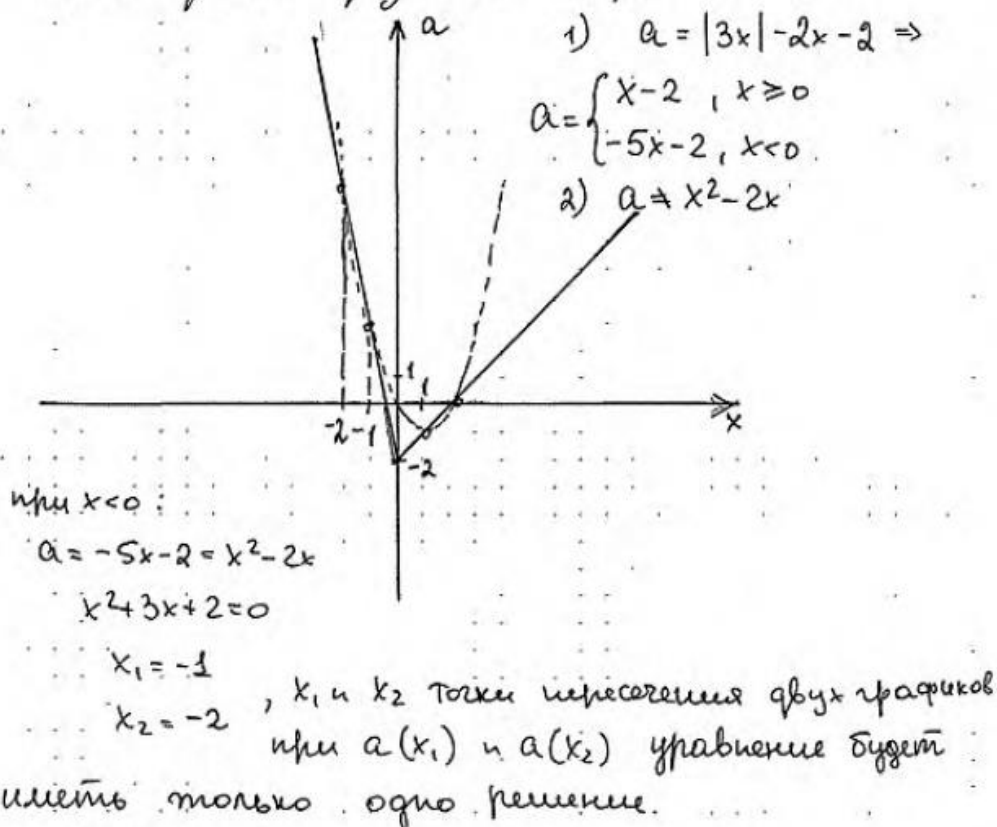
$$\frac{|3x| - 2x - 2 - a}{x^2 - 2x - a} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: $-2 < a < -1$; $-1 < a < 0$; $0 < a < 3$; $3 < a < 8$; $a > 8$.

N18. $\frac{|3x| - 2x - 2 - a}{x^2 - 2x - a} = 0$

имеет ровно 2 различных корня $a = ?$



при $x \geq 0$
 $x - 2 = x^2 - 2x \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_3 = 1, x_4 = 2$; При
 $a(x_3)$ и $a(x_4)$ будет только одно решение $\Rightarrow$;
 $\Rightarrow a(x_1) = 3, a(x_2) = 8, a(x_3) = -1, a(x_4) = 0$, в точке

$a = -2$ уравнение также будет иметь
 только одно решение, при $a < -2$ решений
 не будет $\Rightarrow a > -2, a \neq -1, a \neq 0, a \neq 3, a \neq 8 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a \in (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 8) \cup (8; +\infty)$.
 Ответ: $a \in (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 8) \cup$
 $\cup (8; +\infty)$.

7. Критерии проверки и оценка решений заданий 18

Задание 18 проверяет достижение следующих целей изучения математики на профильном уровне: «развитие логического мышления, алгоритмической культуры, пространственного воображения, математического мышления и интуиции, творческих способностей, необходимых для продолжения образования и для самостоятельной деятельности в области математики и её приложений в будущей профессиональной деятельности».

При этом, для решения этой задачи не требуется никаких знаний, выходящих за рамки школьного курса.

Условие задания 18 разбито на пункты – ряд подзадач (частных случаев), последовательно решая которые, можно в итоге полностью выполнить задание. Такое разбиение, в первую очередь, облегчает участнику экзамена планирование работы над данной задачей, а также позволяет более чётко и прозрачно провести оценивание выполнения задания.

Задание 1

В последовательности $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1$, $a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

а) Приведите пример такой последовательности.

б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?

в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

Решение.

а) Например, последовательность 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, ..., 233, -230, 235 удовлетворяет условию задачи (чередуются суммы чисел 3 и 5).

б) Поскольку 3, 5 и 25 – нечётные числа, любые два соседних члена последовательности имеют разную чётность. На нечётных местах должны стоять нечётные числа, а на чётных – чётные. Число 235 нечётное, поэтому оно не может стоять на чётном месте. Значит, последовательность не может состоять из 1000 членов.

в) Рассмотрим три члена последовательности: a_k, a_{k+1}, a_{k+2} ($1 \leq k \leq n-2$).

Поскольку $a_k + a_{k+1} \geq 3$, $a_{k+1} + a_{k+2} \leq 25$, получаем: $a_{k+2} \leq a_k + 22$.

В предыдущем пункте было показано, что последовательность должна состоять из нечётного числа членов. Пусть $n = 2m + 1$, тогда

$$a_n = a_{2m+1} \leq a_{2m-1} + 22 \leq a_{2m-3} + 22 \cdot 2 \leq \dots \leq a_1 + 22 \cdot m; \quad 235 \leq 1 + 22m,$$

откуда $m \geq 11$. Значит, последовательность состоит не менее чем из 23 чисел.

Приведём пример последовательности, удовлетворяющей условию задачи, состоящей из 23 членов: 1, 2, 23, -20, 45, -42, 67, -64, 89, -86, 111, -108, 133, -130, 155, -150, 175, -170, 195, -190, 215, -210, 235.

Ответ: а) например, 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, ..., 233, -230, 235; б) нет; в) 23.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в п. а; – обоснованное решение п. б; – искомая оценка в п. в; – пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задание 2

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

- а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$, если все числа на доске кратны 3?
б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?
в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

Решение.

- а) Если на доске записано 29 зелёных чисел: 3, 6, ..., 87 – и одно красное число 21, то их сумма меньше 1395.
б) Пусть на доске ровно одно красное число. Тогда зелёных чисел 29, а их сумма не меньше, чем сумма 29 наименьших чисел, делящихся на 3:

$$3 + 6 + \dots + 87 = \frac{90 \cdot 29}{2} = 1305.$$

Это противоречит тому, что сумма написанных чисел равна 1067.

- в) Пусть на доске написано n красных чисел и $30 - n$ зелёных чисел. Тогда сумма красных чисел не меньше

$$7 + 14 + \dots + 7n = \frac{7n^2 + 7n}{2},$$

а сумма зелёных чисел не меньше

$$3 + 6 + \dots + 3(30 - n) = \frac{3(31 - n)(30 - n)}{2} = \frac{3n^2 - 183n + 2790}{2}.$$

Таким образом, $1067 \geq 5n^2 - 88n + 1395$; $5n^2 - 88n + 328 \leq 0$, откуда, учитывая, что n – целое, получаем $n \geq 6$.

Приведём пример 6 красных чисел и 24 зелёных чисел, сумма которых равна 1067: 7, 14, 21, 28, 35, 56, 3, 6, ..., 66, 69, 78.

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта а; – обоснованное решение пункта б; – искомая оценка в пункте в; – пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Примеры оценивания решений задания 18

Пример 18.1

В последовательности $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1$, $a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

а) Приведите пример такой последовательности.

б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?

в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

Ответ: а) например, 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, ..., 233, -230, 235; б) нет; в) 23.

б) Нет. т.к. в этой посл. $a_i + a_{i+1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 25 \end{bmatrix} \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ т.к. a_1 - неч., то все четные члены - чет,
а нечетные - неч $\Rightarrow a_n = 235$ - неч член т.е.
n не 1000. $\Rightarrow$ невозможно. не может.

а) 1; 2; -1; 6; 23

а) 1; -26; 51; -46; 71; -66; 91; -86; 111; -106; 131;
-126; 151; -146; 171; -166; 191; -188; 213; -210; 235

Пример 18.2

В последовательности $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1$, $a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

а) Приведите пример такой последовательности.

б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?

в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

Ответ: а) например, 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, ..., 233, -230, 235; б) нет; в) 23.

① а) Пример такой последовательности:

1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, 9, -6, 11, -8, 13, -10, 15, -12, 17, -14, 19, -16, 21, -18, 23, -20, 25, -22, 27, -24, 29, -26, 31, -28, 33, -30, 35, -32, 37, -34, 39, -36, 41, -38, 43, -40, 45, -42, 47, -44, 49, -46, 51, -48, 53, -50, 55, -52, 57, -54, 59, -56, 61, -58, 63, -60, 65, -62, 67, -64, 69, -66, 71, -68, 73, -70, 75, -72, 77, -74, 79, -76, 81, -78, 83, -80, 85, -82, 87, -84, 89, -86, 91, -88, 93, -90, 95, -92, 97, -94, 99, -96, 101, -98, 103, -100, 105, -102, 107, -104, 109, -106, 111, -108, 113, -110, 115, -112, 117, -114, 119, -116, 121, -118, 123, -120, 125, -122, 127, -124, 129, -126, 131, -128, 133, -130, 135, -132, 137, -134, 139, -136, 141, -138, 143, -140, 145, -142, 147, -144, 149, -146, 151, -148, 153, -150, 155, -152, 157, -154, 159, -156, 161, -158, 163, -160, 165, -162, 167, -164, 169, -166, 171, -168, 173, -170, 175, -172, 177, -174, 179, -176, 181, -178, 183, -180, 185, -182, 187, -184, 189, -186, 191, -188, 193, -190, 195, -192, 197, -194, 199, -196, 201, -198, 203, -200, 205, -202, 207, -204, 209, -206, 211, -208, 213, -210, 215, -212, 217, -214, 219, -216, 221, -218, 223, -220, 225, -222, 227, -224, 229, -226, 231, -228, 233, -230, 235.

б) Да, например, последовательность, членами которой являются чередующиеся числа 0 и 3.

0, 3, 0, 3, 0, 3...

Сумма любых двух соседних членов в последовательности равна 3, что соответствует условию.

В последовательности, состоящей из 1000 членов, будет 1000 чисел 0 и 1000 чисел 3. Все нечетные члены последовательности будут нулями, все четные - тройками.

Пример 18.3

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$, если все числа на доске кратны 3?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

а) $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$ - 30 чисел. Пропустив некоторые они меньше. Да, может, т.к. мы можем заменить число 90 на число 21, при этом-ное другим цветом (красным), а всегда другие числа уменьшится на $1395 - 2 \cdot 90$.

б) Возьмём наименьшую сумму чисел написанных только зелёными. Это $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$. Нам нужно добавить одно красное число. Для того, чтобы минимизировать сумму мы добавим самое маленькое зелёное - 90 и добавим минимально возможное красное - 7. Итоговая сумма $1395 - 90 + 7 = 1312 > 1067 \Rightarrow$ не возможно.

в) Если красные 3-х дают остаток при делении на 7 в остатках короче: 3 6 2 5 1 4 0. Число 1067 даёт остаток 3 при делении на 7 $\Rightarrow$ Это зелёные числа должны давать сумму кратную 7. Они не могут поделить на 7 т.к. $3 + \dots + 87 = 1342 \neq 1067 \Rightarrow$ они должны поделить на 63.

$3 + \dots + 63 = 63 \cdot 11 = 759$, $1067 - 759 = 308$ $\begin{array}{r} 308 \\ 7 \cdot 44 \end{array}$

Пример 18.4

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$, если все числа на доске кратны 3?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

а) Да, может. Например, вместо зелёного числа 24 можно поставить красное число 21 (сказано, что красное число может равняться зелёному). Тогда сумма примет вид $3 + 6 + \dots + 21 + 21 + 27 + \dots + 90 = 1392 < 1395$.

Ответ: да, может.

б) Число 1067 имеет остаток 2 при делении на 3. Следовательно, красное число тоже должно иметь остаток 2 при делении на 3 (т.к. все зелёные числа имеют остаток 0). Наименьшее такое число — 14. Как известно из пункта а), сумма 30 наименьших зелёных чисел равна 1395. Если мы заменим наибольшее из них (90) на 14, то сумма будет равна $1395 - 90 + 14 = 1319 > 1067$. Следовательно, такого быть не может.

Ответ: нет, не может.

в) $1395 - 1067 = 328 \Rightarrow$ в сумме $3 + 6 + \dots + 90$ необходимо так заменить несколько зелёных чисел на красные, чтобы суммарная разница между ними составила 328.

Во-первых, заметим, что за 5 замен это сделать невозможно, поскольку даже если заменить самые большие зелёные числа (90, 87, 84, 81, 78) на самые маленькие красные (7, 14, 21, 28, 35), то суммарная разница составит $305 < 328$.

Во-вторых, заметим, что если вдобавок заменить 72 на 49 ($72 - 49 = 23$), то суммарная разница составит как раз 328 ($305 + 23 = 328$) $\Rightarrow$ искомого наименьшего количества красных чисел — 6.

Ответ: 6.

16.1	16.2	16.3	16.4	16.5	17.1	17.2	17.3	17.4	17.5

18.1	18.2	18.3	18.4